

prou. Si GeoGebra els anomena f i g , escriurem ara l'expressió següent:

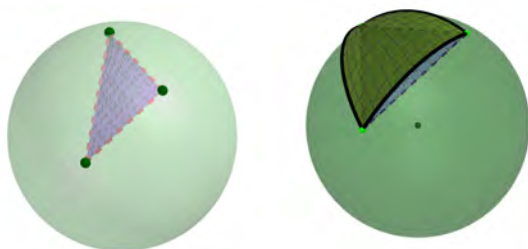
$\text{Superfície}(f(t)+k(g(-t+1)-f(t)), k, 0, 1, t, 0, 1)$

Entendreu el perquè si escriviu $g(t)$ en lloc de $g(-t+1)$. Fem servir el segment com a corba (abans no es podia), però GeoGebra el defineix amb un ordre determinat dels punts. El que fem és construir un triangle com a superfície paramètrica unint amb segments els punts d'un segment amb els de l'altre, la qual cosa es pot fer de dues maneres diferents, segons de quin punt a quin altre anem.

A partir d'aquí només cal escriure:

$\text{Superfície}((R; \arg(s(k, t); \text{alt}(s(k, t))), k, 0, 1, t, 0, 1)$

on R és el radi de l'esfera i s el nom de la superfície (o el que li hagi donat el programa). La idea és molt senzilla: projectem cada punt de la superfície paramètrica triangle a sobre de l'esfera "traslladant" el triangle a sobre de l'esfera.



Figures 7 i 8. Triangles paramètrics pla i esfèric

Amb aquesta nova construcció podem, per exemple, comparar les propietats dels triangles esfèrics versus les dels triangles plans.

A partir d'aquí surten moltes possibilitats, com pot ser el càlcul de l'àrea del triangle. Es pot veure molt bé en una construcció de José Manuel Arranz:

<https://www.geogebra.org/m/AURxPnkS>

Recordeu que us la podeu descarregar i veure com està feta. L'àrea també es pot calcular de manera aproximada, però cal treballar amb seqüències, i és tediós.

També podem construir un quadrilàter esfèric. La construcció és molt semblant, però amb quatre punts. El quadrilàter pla format pels quatre punts es pot definir en forma paramètrica, com en el cas del triangle, però fent servir dos segments oposats del quadrilàter. Per dibuixar la superfície paramètrica serveix la mateixa expressió que hem fet servir per al triangle.

Cal tenir en compte que els programes de seguiment d'activitats esportives (caminar, córrer, fer bicicleta) registren, segon a segon, la posició (latitud i longitud) i l'altitud de cada punt on som; només cal buscar l'opció "Exportar a gpx". L'arxiu es pot visualitzar, per exemple, a Google Earth. Es poden pensar moltes activitats didàctiques amb aquesta eina. Els programes esmentats tenen una versió bàsica gratuïta. D'altra banda, proveu d'escriure, per exemple, $30^\circ 40'$ a Google Maps i mireu on aneu a parar.

És tot un món!

Matemàtiques i art

Calidoscopis deltoidals

Josep Rey Nadal, Manuel Udina Abelló
Museu de Matemàtiques de Catalunya (MMACA)

En l'exposició "Imaginary, una simfonia matemàtica", de la FME (UPC) 2021 el MMACA va presentar en primícia els *calidoscopis deltoidals*.

Aquest article és una adaptació de la descripció d'aquests calidoscopis que es va presentar a

Bridges 2022, un congrés dedicat a art i matemàtiques [6].

Els políedres regulars tenen molts plans de simetria. Si representem els plans de simetria amb miralls, es generen calidoscopis que, a partir d'una part del políedre, permeten vi-

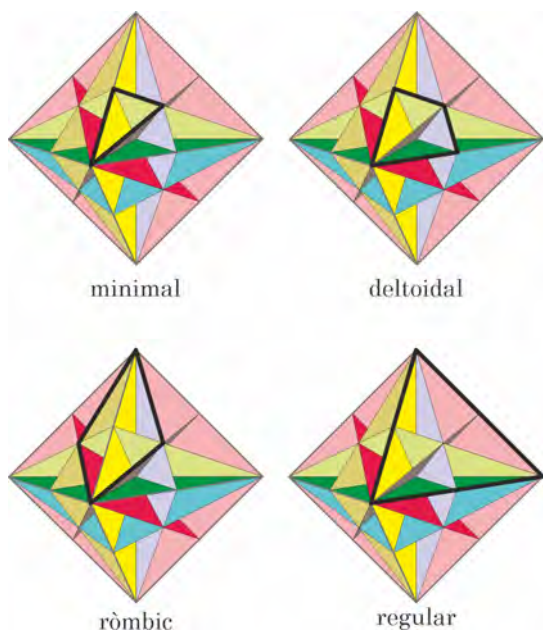
sualitzar el políedre sencer. Per exemple, si construïm amb miralls les “piràmides obertes (sense base)” que uneixen el centre d’un políedre regular amb una de les cares i representem la cara amb una corona perimetral podrem “veure” el políedre sencer. Aquests serien els calidoscopis regulars (multipliquen per 4, 6, 8, 12 o 20).



Calidoscopis regulars corresponents als cinc sòlids platònics

Calidoscopis minimal

Hi ha molts tipus de calidoscopis que ens permetran **reproduir** políedres i, per tant, té sentit començar pels més petits, i combinar-los per obtenir les diverses famílies.

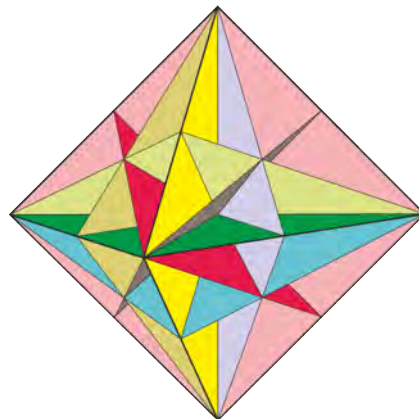


Calidoscopis octaèdrics minimal, deltoidal, ròmbic i regular

Hem descrit breument els calidoscopis regulars, i en l’exposició permanent del MMACA es presenten els calidoscopis ròmbics. Per introduir els calidoscopis deltoidals cal fixar-se una mica en els minimal i estudiar-ne les propietats.

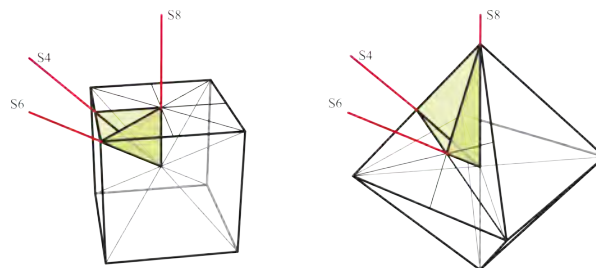
Calidoscopi minimal octaèdric

L’octàedre té 9 plans de simetria. Com es pot veure a la figura, divideixen cada cara en 6 triangles iguals, i l’octàedre, en 48 peces iguals. Cada peça és una piràmide amb vèrtex al centre de l’octàedre, i de base, un dels triangles esmentats.



Per tant, la part més petita de l’octàedre que permet reconstruir l’octàedre sencer per simetries és $1/48$ del total i es pot utilitzar per crear el calidoscopi minimal octaèdric amb angles dièdrics de 45° , 60° , i 90° . Les arestes dels angles dièdrics les anomenem S8, S6 i S4, respectivament.

L’octàedre i el cub tenen els mateixos plans de simetria i permeten disseccionar tant l’un com l’altre en 48 piràmides iguals (el que difereix és “la inclinació” de la piràmide). Al dibuix es pot veure com les arestes concurrents de la piràmide del cub i de l’octàedre són paral·leles i, per tant, donen lloc al mateix calidoscopi.



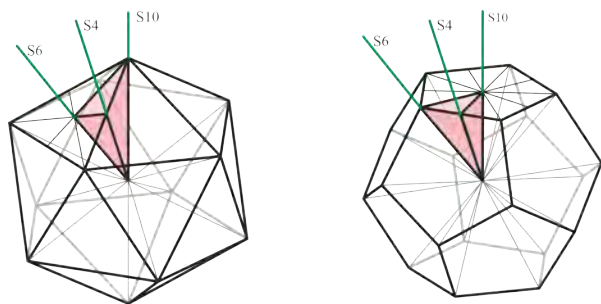
Calidoscopi minimal octaèdric

En aquest calidoscopi minimal, el cub s’obté amb una mitja “mitja aresta” perpendicular a S4 en la cara oposada a S8, i l’octàedre, amb una mitja “mitja aresta” perpendicular a S4 en la cara oposada a S6. Aquestes dues arestes coincideixen en un punt d’S4 i mostren

la dualitat entre el cub i l'octàedre. Com que en tots dos casos es tracta d'1/4 d'aresta i el calidoscopi multiplica per 48 es generaran les 12 arestes del cub o de l'octàedre.

Calidoscopi minimal icosaèdric

El dodecàedre i l'icosàedre comparteixen els 15 plans de simetria i es poden obtenir calidoscopis minimal a partir d'1/120 del políedre sencer. Cada una de les 12 cares del dodecàedre es pot dividir en 10 triangles iguals i, unint-los amb el centre del dodecàedre, es forma la piràmide que dona lloc al calidoscopi. Anàlogament, cada una de les 20 cares de l'icosàedre es pot dividir en 6 triangles iguals i formen piràmides des del centre del políedre. Els angles dièdrics d'una d'aquestes piràmides són de 36°, 60° i 90°. Anomenem els eixos d'aquests angles dièdrics S10, S6 i S4.



Calidoscopi minimal icosaèdric

En aquest calidoscopi minimal el dodecàedre s'obté amb una aresta perpendicular a S4 en la cara oposada a S10, i l'icosàedre, amb una aresta perpendicular a S4 en la cara oposada a S6. Aquestes dues arestes coincideixen en un punt d'S4 i mostren la dualitat entre el dodecàedre i l'icosàedre. Com que en tots dos casos es tracta d'1/4 d'aresta i el calidoscopi multiplica per 120, es generaran les 30 arestes del dodecàedre o de l'icosàedre.

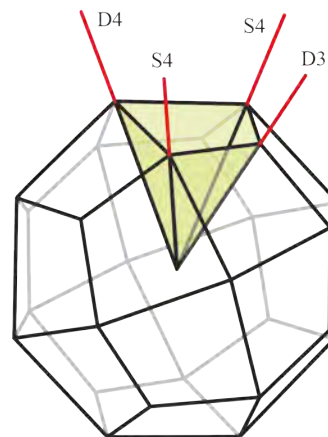
Calidoscopis deltoidals

Ens centrem, finalment, en el contingut principal d'aquest article, els calidoscopis deltoidals que s'obtenen quan s'ajunten dos calidoscopis minimal per la cara oposada a l'angle dièdric recte.

Calidoscopi deltoidal icositetraèdric

Amb la combinació de dos octaèdrics minimal (1/48) obtenim el calidoscopi icositetraèdric

deltoidal (1/24) amb tres angles dièdrics de 90° i un de 120°. Els dos eixos S4 conserven aquest nom, el que és unió dels dos S8 l'anomenem D4 i el que és unió de dos S6 serà el D3. La secció perpendicular a la intersecció dels plans diagonals d'aquest calidoscopi és un deltoide i és la cara de l'icositetraèdre deltoidal, un dels políedres de Catalan (dual del petit rombicuboctàedre).



Calidoscopi deltoidal icositetraèdric

El cub es genera amb una peça formada per dues mitges "mitges arestes" en forma de V vermella que formen un angle de 90°, amb el vèrtex a l'eix D3 i en un pla perpendicular a D4. La construcció acurada de les peces, amb el biaix adequat, fa que l'encaix sigui natural. Podem observar que la peça generadora del cub conté un terç del vèrtex i 1/4 d'aresta i, per tant, en multiplicar per 24 ens donarà 8 vèrtexs i 12 arestes.

També generem l'octàedre anàlogament: cal col·locar les dues mitges "mitges arestes" de la V groga de 60° amb el vèrtex en l'aresta oposada D4 i en un pla perpendicular a D3. Podem veure que les arestes de l'octàedre són perpendiculars a les del cub. La tercera peça permet veure el cuboctàedre com a intersecció del cub i l'octàedre.



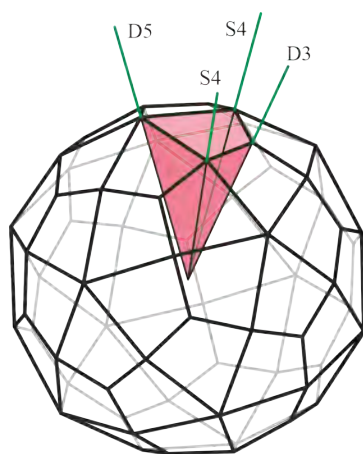
Cub i octàedre



Les peces que generen els sòlids platònics i arquimedi-
ans del grup octaèdric

Calidoscopi deltoïdal hexacontaèdric

Amb la combinació de dos minimalis icosaèdrics (1/120) obtenim el calidoscopi deltoïdal hexacontaèdric (1/60). Els angles dièdrics entre les seves cares són de 90° , 120° , 90° i 72° . Els eixos dels diedres seran, respectivament, S4, D3, S4 i D5. La secció perpendicular a la intersecció dels plans diagonals d'aquest calidoscopi és la cara de l'hexacontàedre deltoïdal (dual del petit rombicoidèdrec).



Calidoscopi hexacontaèdric deltoïdal

El dodecàedre es genera amb una peça formada per dues mitges “mitges arestes” en forma de V vermella que formen un angle de 108° , amb el vèrtex en l'eix D3 i en un pla perpendicular a D5. Podem observar que la peça generadora del dodecàedre conté un terç del vèrtex i 1/2 d'aresta i, per tant, en multiplicar per 60 ens donarà 20 vèrtexs i 30 arestes.



Dodecàedre i icosaèdre

També generem l'icosaèdre anàlogament: cal col·locar les dues mitges “mitges arestes” de la V groga de 60° amb el vèrtex en l'aresta D5 i en un pla perpendicular a D3. La tercera peça permet veure l'icosidodecàedre com a intersecció de l'icosaèdre i el dodecàedre.



Dodecàedre escapçat



Icosidodecàedre



Icosaèdre escapçat



Petit rombicoidèdrec



Gran rombicoidèdrec

Els cinc políedres arquimedi-ans en el calidoscopi hexacontaèdric deltoïdal

Es pot trobar més informació sobre calidoscopis i políedres a les referències [1-6].

Referències

- [1] H.S.M. Coxeter “Regular polytopes”. Dover. 1973.
- [2] G. Hart, <https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html>
- [3] J. Rey Nadal, <http://gallery.bridgesmathart.org/exhibitions/2020-bridges-conference/josep-rey>
- [4] M. J. Wenninger. “Spherical Models”. Dover publications, Inc. Mineola, Nova York, 1999.
- [5] Stand-up Maths (Matt Parker), “Making efficient Platonic and Archimedean shapes in a kaleidoscope” <https://youtu.be/mUK-j5bKk0Q>
- [6] Josep Rey-Nadal, Manuel Udina <https://archive.bridgesmathart.org/2022/bridges2022-351.pdf>